

1 Fonctions de Bessel de première espèce

🎯 **Objectif** : déterminer le développement en série de puissance et la fonction génératrice des fonctions de Bessel de première espèce.

📖 **Théorie** : analyse réelle.

🔪 **Difficulté** : ★★☆☆ obligatoire.

Les fonctions de Bessel de première espèce, notées J_ν , sont les solutions uniques de l'équation différentielle ordinaire de Bessel,

$$x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) = 0.$$

Dans le cas où paramètre $\nu = m \in \mathbb{Z}$ est un nombre entier, on peut définir une fonction génératrice $g(x, t)$ donnée par une série de Laurent autour de $t = 0$,

$$g(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) t^m.$$

(a) A l'aide de la méthode de Frobenius, montrer que le développement en série de puissance de la fonction de Bessel $J_m(x)$ s'écrit,

$$J_m(x, t) = a_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{2j}} \frac{m!}{j!(j+m)!} x^{m+2j} \quad \text{si } m \in \mathbb{N}.$$

(b) Montrer que la fonction génératrice des fonctions de Bessel de première espèce $J_m(x)$ s'écrit,

$$g(x, t) = \exp\left(\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)\right),$$

et identifier a_0 .

(c) Montrer que les coefficients des puissances négatives de t sont liés aux coefficients de puissances positives par l'équation,

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x).$$

(d) A l'aide d'une dérivée de la fonction génératrice $g(x, t)$, démontrer la relation de récurrence pour les fonctions de Bessel de première espèce,

$$J_{m+1}(x) + J_{m-1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x).$$

- (e) Déterminer le développement en série de puissances des fonctions de Bessel $J_\nu(x)$ lorsque $\nu \in \mathbb{R}$ par généralisation du cas où $m \in \mathbb{N}$.
- (f) Montrer les deux fonctions de Bessel demi-entières les plus simples s'écrivent,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x) ,$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x) .$$

2 Fonctions de Neumann

🎯 **Objectif** : lier les fonctions de Neumann aux fonctions de Bessel.

📖 **Théorie** : analyse vectorielle.

🔧 **Difficulté** : ☆☆☆ facultatif.

L'équation différentielle de Bessel sous la forme de Sturm-Liouville s'écrit,

$$\frac{d}{dx} \left(x K'_\nu(x) \right) + \left(x - \frac{\nu^2}{x} \right) K_\nu(x) = 0 .$$

- a) Compte tenu du fait que les fonctions de Bessel de première espèce $J_\nu(x)$ sont solutions de l'équation différentielle de Bessel sous la forme de Sturm-Liouville, en déduire que la solution générale s'écrit,

$$K_\nu(x) = a_\nu J_\nu(x) + b_\nu Y_\nu(x) ,$$

où les coefficients a_ν et b_ν sont des constantes. Montrer que les fonctions de Neumann $Y_\nu(x)$, aussi appelées fonctions de Bessel de deuxième espèce, sont liées aux fonctions de Bessel de première espèce par la relation intégrale,

$$Y_\nu(x) = J_\nu(x) \int^x \frac{dx'}{x' J_\nu(x')^2} .$$

3 Fonctions de Bessel sphériques

🎯 **Objectif** : lier les fonctions de Neumann aux fonctions de Bessel.

📖 **Théorie** : analyse vectorielle.

🔧 **Difficulté** : ★★☆☆ facultatif.

Les fonctions de Bessel de première espèce $J_\nu(x)$ et de deuxième espèce $Y_\nu(x)$ satisfont l'équation de différentielle de Bessel,

$$\begin{aligned}x^2 J_\nu''(x) + x J_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2) J_\nu(x) &= 0, \\x^2 Y_\nu''(x) + x Y_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2) Y_\nu(x) &= 0.\end{aligned}$$

Les fonctions de Bessel sphériques de première espèce $j_\nu(x)$ et de deuxième espèce $y_\nu(x)$ satisfont l'équation de différentielle de Bessel,

$$\begin{aligned}x^2 j_\nu''(x) + 2x j_\nu'(x) + (x^2 - \nu(\nu + 1)) j_\nu(x) &= 0, \\x^2 y_\nu''(x) + 2x y_\nu'(x) + (x^2 - \nu(\nu + 1)) y_\nu(x) &= 0.\end{aligned}$$

- a) Montrer à une constante près, que les fonctions de Bessel sphériques de première espèce $j_\nu(x)$ et de deuxième espèce $y_\nu(x)$ sont liées aux fonctions de Bessel de première espèce $J_\nu(x)$ et de deuxième espèce $Y_\nu(x)$ comme,

$$j_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(x) \quad \text{et} \quad y_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{\nu+\frac{1}{2}}(x).$$

4 Equation de Helmholtz

🎯 **Objectif** : écrire l'équation de Helmholtz en coordonnées sphériques.

📖 **Théorie** : analyse vectorielle.

🔧 **Difficulté** : ★★★☆☆ obligatoire.

L'opérateur laplacien s'écrit en coordonnées sphériques r , θ et φ ,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

- a) L'équation d'onde de Helmholtz pour une fonction $\phi(r, \theta)$ avec une symétrie azimutale d'axe vertical s'écrit,

$$\nabla^2 \phi(r, \theta) + k^2 \phi(r, \theta) = 0,$$

ce qui signifie que la fonction en coordonnées sphériques ne dépend pas de l'angle φ . A l'aide de la méthode de séparation des variables,

$$\phi(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta) ,$$

et des variables sans dimension $x = \cos \theta$ et $z = kr$, montrer que la fonction radiale $K_\ell(z) = R_\ell(r)$ où $R(r) \equiv R_\ell(r)$ avec ℓ fixé satisfait l'équation différentielle de Bessel sphérique,

$$z^2 \frac{d^2 K_\ell(z)}{dz^2} + 2z \frac{dK_\ell(z)}{dz} + \left(z^2 - \ell(\ell + 1) \right) K_\ell(z) = 0 ,$$

et la fonction nodale $P_\ell(x) = \Theta_\ell(\theta)$ où $\Theta(\theta) \equiv \Theta_\ell(\theta)$ avec ℓ fixé satisfait l'équation différentielle de Legendre,

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{dP_\ell(x)}{dx} \right) + \ell(\ell + 1) P_\ell(x) = 0 .$$

En déduire que les fonctions propres $\phi(r, \theta) \equiv \phi_\ell(r, \theta)$ peuvent être exprimées comme,

$$\phi_\ell(r, \theta) = \left(a_\ell j_\ell(kr) + b_\ell y_\ell(kr) \right) P_\ell(\cos \theta) ,$$

où $j_\ell(kr)$ et $y_\ell(kr)$ sont les fonctions de Bessel sphériques, soit les deux solutions linéairement indépendantes de l'équation de Bessel sphérique, et $P_\ell(\cos \theta)$ sont les polynômes de Legendre de degré ℓ . Les coefficients a_ℓ et b_ℓ doivent être déterminés à l'aide des conditions aux bords.

b) L'équation d'onde de Helmholtz pour une fonction $\phi(r, \theta, \varphi)$ s'écrit,

$$\nabla^2 \phi(r, \theta, \varphi) + k^2 \phi(r, \theta, \varphi) = 0 ,$$

A l'aide de la méthode de séparation des variables,

$$\phi(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) ,$$

et des variables sans dimension $x = \cos \theta$ et $z = kr$, montrer que la fonction radiale $K_\ell(z) = R_\ell(r)$ où $R(r) \equiv R_\ell(r)$ avec ℓ fixé satisfait l'équation différentielle de Bessel sphérique,

$$z^2 \frac{d^2 K_\ell(z)}{dz^2} + 2z \frac{dK_\ell(z)}{dz} + \left(z^2 - \ell(\ell + 1) \right) K_\ell(z) = 0 ,$$

et la fonction nodale $P_\ell^m(x) = \Theta_\ell^m(\theta)$ où $\Theta(\theta) \equiv \Theta_\ell^m(\theta)$ avec ℓ et m fixés satisfait l'équation différentielle de Legendre généralisée,

$$\frac{d}{dx} \left((1 - x^2) \frac{dP_\ell^m(x)}{dx} \right) + \left(\ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) P_\ell^m(x) = 0 .$$

En déduire que les fonctions propres $\phi(r, \theta, \varphi) \equiv \phi_{\ell m}(r, \theta, \varphi)$ peuvent être exprimées comme,

$$\phi_{\ell m}(r, \theta, \varphi) = \left(a_{\ell} j_{\ell}(kr) + b_{\ell} y_{\ell}(kr) \right) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi),$$

où les coefficients a_{ℓ} et b_{ℓ} doivent être déterminés à l'aide des conditions aux bords. Les fonctions harmoniques sphériques $Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ sont définies comme,

$$Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = \Theta_{\ell}^m(\theta) \Phi_{\ell}^m(\varphi) = c_{\ell}^m P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\varphi},$$

où $P_{\ell}^m(\cos \theta)$ sont les polynômes de Legendre généralisés et les coefficients c_{ℓ}^m sont des constantes de normalisation.